Y203016080

(2110-42K)

(MAT4SKB)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, SEPTEMBER/OCTOBER 2022.

(Regular)

Second Year - Fourth Semester

Part II - Mathematics

Paper V — LINEAR ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer any FIVE questions.

1. Let $V(F)$ be a vector space. Then prove that

   (a) $a, b \in F,\ \bar{o} \neq \alpha \in V,\ a\alpha = b\alpha \Rightarrow a = b$

   (b) $o \neq a \in F,\ \alpha, \beta \in V,\ a\alpha = a\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

   $V(F)$ ఒక సదిశాంతరాళం అయిన

   (a) $a, b \in F,\ \bar{o} \neq \alpha \in V,\ a\alpha = b\alpha \Rightarrow a = b$

   (b) $o \neq a \in F,\ \alpha, \beta \in V,\ a\alpha = a\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ అని నిరూపించుము.

2. If W_1, W_2 are two subspaces of a vector space $V(F)$ then prove that $W_1 \cap W_2$ is also a subspace of $V(F)$.

   $V(F)$ అనే సదిశాంతరాళంకు W_1, W_2 లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయిన $W_1 \cap W_2$ కూడా $V(F)$ కు ఉపాంతరాళం అవుతుందని నిరూపించుము.

3. If $V(F)$ is a finite dimensional vector space then prove that there exists a basis set of V.

   $V(F)$ ఒక పరిమిత పరిమాణాంతరాళం అయిన V కు ఒక ఆధారం వ్యవస్థితం అగునని నిరూపించుము.

4. If $T : V_3(R) \to V_2(R)$ is defined as $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$. Prove that T is a linear transformation.

   $T : V_3(R) \to V_2(R)$ ప్రమేయాన్ని $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ గా నిర్వచిస్తే T ఒక రుజు పరివర్తనము అని చూపుము.

5. Let $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces and $T : U \to V$ is a linear transformation. Then prove that $N(T)$ is a subspace of $U(F)$.

   $U(F)$ మరియు $V(F)$ లు రెండు సదిశాంతరాళాలు మరియు $T : U \to V$ ఒక రుజుపరివర్తనము అయిన $U(F)$ కు $N(T)$ ఒక ఉపాంతరాళం అని నిరూపించుము.

11. (a) Find $T(x,y,z)$ when $T: R^3 \to R$ is defined by $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$, $T(0,0,1) = -2$.

$T: R^3 \to R$ కు $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-2) = 1$, $T(0,0,1) = -2$ గా నిర్వచిస్తే $T(x,y,z)$ ను కనుగొనుము.

Or

(b) State and prove Rank Nullity theorem.

కోటి – శూన్యతా సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

12. (a) If $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ then verify Cayley-Hamilton theorem for A.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ అయిన A కు కేలీ– హేమిల్టన్ సిద్ధాంతాన్ని సరిపోల్చుము.

Or

(b) State and prove Cayley-Hamilton theorem.

కేలీ– హేమిల్టన్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

13. (a) In an inner product space $V(F)$, prove that $|<\alpha,\beta>| \le \|\alpha\|\|\beta\|\ \forall \alpha,\beta \in V$.

ఒక అంతర్లబ్ద అంతరాళం $V(F)$ లో $|<\alpha,\beta>| \le \|\alpha\|\|\beta\|\ \forall \alpha,\beta \in V$ ను నిరూపించుము.

Or

(b) State and prove Bessel's inequality.

బెస్సెల్స్ అసమానతను ప్రవచించి నిరూపించుము.

28

---

6. Find the Characteristic roots of the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ మాత్రిక యొక్క లాక్షణిక మూలాలు కనుగొనుము.

7. State and prove parallelogram law.

సమాంతర చతుర్భుజము నియమము ప్రవచించి, నిరూపించుము.

8. Find a unit vector orthogonal to (4, 2, 3) in R^3.

R^3 లో (4, 2, 3) కు యూనిట్ లంబసదిశను కనుగొనుము.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

9. (a) Let $V(F)$ be a vector space. A non empty set $W \subseteq V$. Prove that the necessary and sufficient condition for W to be a subspace of V is $a, b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$.

$V(F)$ ఒక సదిశాంతరాళం V యొక్క శూన్యేతర ఉపసమితి W ఒక ఉపాంతరాళం అగుటకు ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in F$ మరియు $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ అని నిరూపించుము.

Or

(b) If W_1 and W_2 are two subspaces of a vector space $V(F)$ then prove that $W_1 + W_2$ is a subspace of V and $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$.

సదిశాంతరాళం $V(F)$ కు W_1 మరియు W_2 లు రెండు ఉపాంతరాళాలు అయిన V కు $W_1 + W_2$ ఉపాంతరాళం మరియు $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$ అని నిరూపించుము.

10. (a) If W_1 and W_2 be two subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$ then prove that $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

$V(F)$ అనే ఒక పరిమిత సదిశాంతరాళంనకు W_1 మరియు W_2 లు రెండు ఉపాంతరాళంలు మరియు అయిన $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ అని నిరూపించుము.

Or

(b) Show that the set $\{(1,0,0,),(1,1,0),(1,1,1)\}$ is a basic of $C^3(C)$. Hence find the coordinates of the vector $(3+4i, 6i, 3+7i)$ in $C^3(C)$.

$\{(1,0,0,),(1,1,0),(1,1,1)\}$ అను సమితి $C^3(C)$ కు ఒక ఆధారము అగునని చూపుము కావున $C^3(C)$ లో $(3+4i, 6i, 3+7i)$ అను సదిశకు నిరూపకాలు కనుగొనుము.